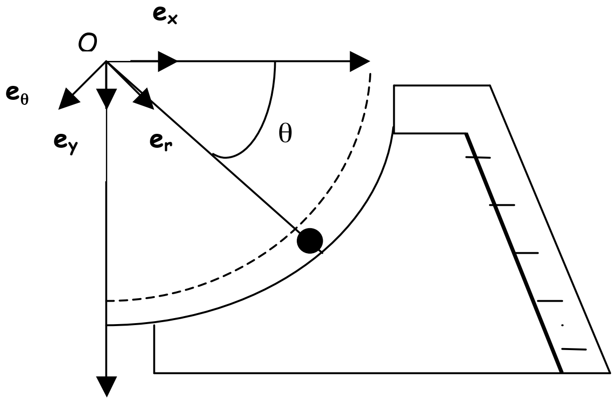
TD Théorème du moment cinétique : TMC

Exercice 1 : Le toboggan

Un enfant assimilé à un point matériel G de masse m=40kg glisse sur un toboggan décrivant une trajectoire circulaire de rayon r=2.5m depuis la position θ_0=15° où il possède une vitesse nulle jusqu'à la position θ =90° où il quitte le toboggan. On néglige tous les frottements. On suppose que le référentiel lié à la terre $\Re(O;\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z})$ est galiléen.

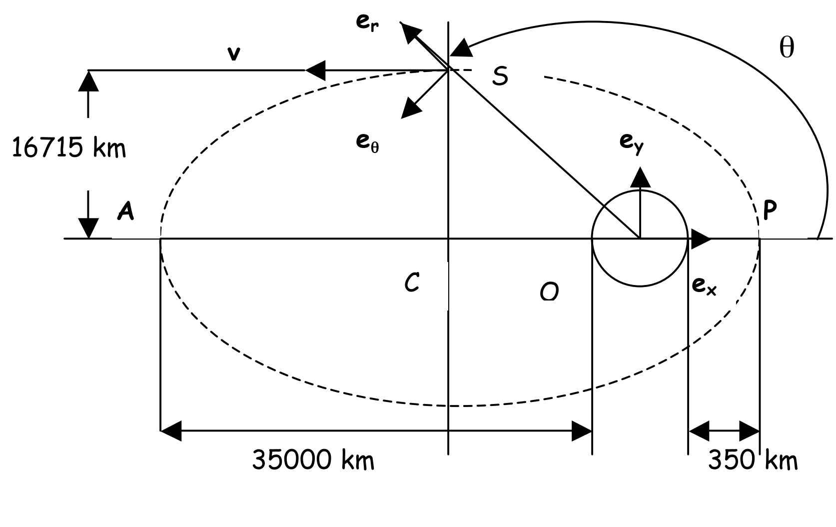
1. Etablir l'équation différentielle du mouvement de l'enfant à l'aide du théorème du moment cinétique (TMC).
2. En déduire l'expression de la vitesse v de l'enfant en fonction de θ. Calculer la vitesse maximale atteinte par l'enfant.



Exercice 2 : Le satellite

Un satellite, assimilé à son centre d'inertie, de masse m=1tonne, décrit une trajectoire elliptique autour de la terre. Ce satellite n'est soumis qu'à la force gravitationnelle F dirigée vers le centre O de la Terre. Le référentiel $\Re_g$ $(O;\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z})$ est supposé galiléen. A l'instant t représenté, la vitesse du satellite dans ce référentiel est v=14650km/h. Le rayon de la Terre : R_T=6400km.

1. Calculer la valeur du moment cinétique du satellite en O dans Rg à l'instant considéré.
2. A l'aide du TMC, donner la valeur de la vitesse du satellite :
   - à son apogé A (point de la trajectoire le plus éloigné de la Terre)
   - à son périgé P (point de la trajectoire le plus près de la Terre)

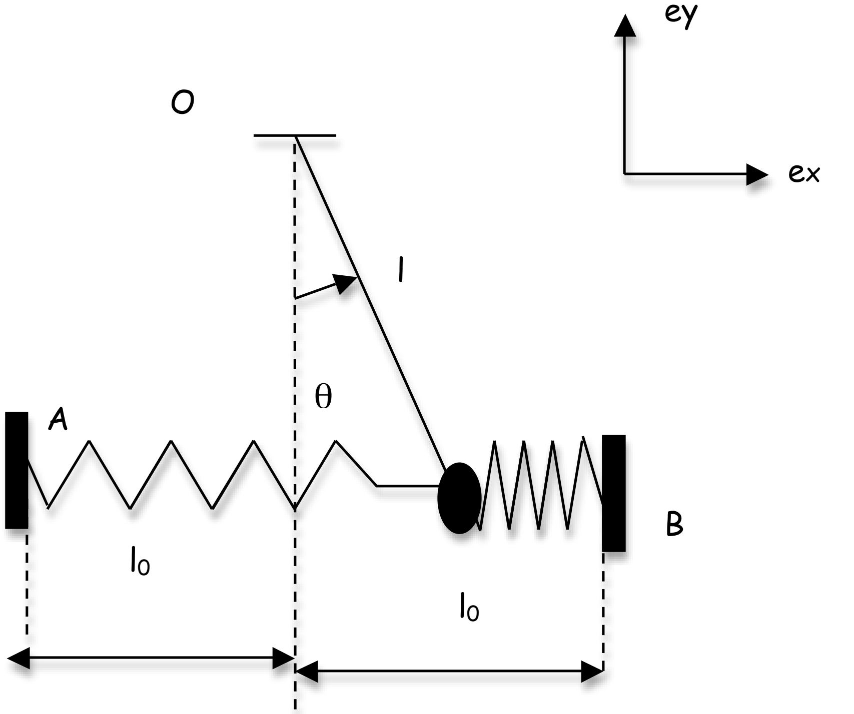


Exercice 3 : Pendule relié à des ressorts

Un pendule simple est constitué d'un fil rigide de masse négligeable et de longueur l, à l'extrémité duquel est fixé un point matériel M de masse m. Il est accroché au point O, fixe par rapport au référentiel R du laboratoire. M est également attaché à deux ressorts (1) et (2) identiques, de raideur k et de longueur à vide l_0, fixés entre deux points A et B distants de $2l_0$: lorsque le pendule est vertical, les ressorts sont au repos.

On déplace légèrement M par rapport à la verticale puis on le laisse évoluer librement. Il oscille alors en décrivant un petit arc de cercle de centre O, dans le plan vertical, et on repère sa position par l'angle θ avec la verticale. Cet angle restant toujours faible, on pourra considérer que les ressorts restent horizontaux.

1. Donner l'expression du moment cinétique de M par rapport à O dans le référentiel R, en utilisant une base cylindrique $(\vec{e}_r ; \vec{e}_\theta , \vec{e}_z)$ d'origine O.
2. Calculer les moments des forces s'exerçant sur M, en fonction de la seule variable θ.
3. Par application du théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ et en déduire la pulsation des petites oscillations.



Exercice 4 : Pendule pesant simple : mouvement horizontal

On constitue un pendule avec un fil idéal de longueur l, dont l'une des extrémités est fixée au point O (origine du repère) ; à l'autre extrémité se trouve un point matériel M de masse m. On prend l'oxe (Oz) comme verticale ascendante (dans le référentiel terrestre supposé galiléen), et on utilise le système de coordonnées cylindriques. Le pendule est écarté d'un angle α par rapport à la verticale, et lancé avec une vitesse $\vec{V}_0 = v_0 \overrightarrow{e_\theta}$ pour que le point M décrive des cercles *horizontaux.*

1. Faire un schéma en perspective, en faisant apparaître la trajectoire de M et ses trois coordonnées. Préciser les valeurs de r et z.
2. Déterminer le vecteur $\vec{V}_0 = v_0 \overrightarrow{e_\theta}$ par application du théorème du moment cinétique et montrer que le mouvement de M est uniforme.
3. Calculer la période T du mouvement. Quelle est la valeur approchée de T si a est faible ?

Eléments de réponse :

Ex.1 : $\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{g}{l}\cos\theta = 0$; $v = \sqrt{2gl\,(\sin\theta - \sin\theta_0)}$, $v_{max} = 21.7\ km\ h^{-1} = 6.02\ m\ s^{-1}$

Ex.2 : L_0=6.8 10^{13} kgm^2s^{-1} ; $V_{apogé}$=5.9 km h^{-1} = 1.6 km s^{-1} , ; $V_{périgé}$= 3.6 10^4 km h^{-1} = 10 km s^{-1}

Ex.3 : $\vec{L_O}(M,R) = ml^2\dot{\theta}\,\vec{e_Z}$

2. $\vec{M}(\vec{T_1},\Re) = \vec{M}(\vec{T_2},\Re) = -kl^2\sin(\theta)\cos(\theta)\,\vec{e_z}$; $\vec{M}(\vec{mg},\Re) = -mgl\sin(\theta)\,\vec{e_z}$, $\vec{M}(\vec{T_{fil}},\Re) = \vec{0}$

3. $\ddot{\theta} + (\frac{2k}{m} + \frac{g}{l})\,\theta = 0 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2k}{m} + \frac{g}{l}}$

Ex. 4 : $\overrightarrow{M_0}(m\vec{g}) = mgl\sin(\alpha)\ \overrightarrow{e_\theta}$;

$\overrightarrow{L_0}(M/\Re) = ml^2(\sin(\alpha)\cos(\alpha)\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_r} + \sin^2(\alpha)\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z})$

$(\frac{d\overrightarrow{L_0}(M/\Re)}{dt})_\Re = ml^2(\sin(\alpha)\cos(\alpha)\ddot{\theta}\,\overrightarrow{e_r} + \sin(\alpha)\cos(\alpha)(\dot{\theta})^2\overrightarrow{e_\theta}\ \sin^2(\alpha)\ddot{\theta}\,\overrightarrow{e_z})$

$\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{g}{l\cos(\alpha)}} \Rightarrow \vec{v_0} = \pm l\sin(\alpha)\sqrt{\frac{g}{l\cos(\alpha)}}\ \overrightarrow{e_\theta} = \pm\sqrt{gl\tan(\alpha)\sin(\alpha)}\ \overrightarrow{e_\theta}$